Math

1 Mathématiques financiers (cahier spécial)

1.1 Méthode récursive p.2

1.2 Equivalence de paiements p.4

Valeur capitalisée : valeur future d'un montant courant =>
Facteur de capitalisation : $(1+i)$
Valeur escomptée : valeur courante d'un montant futur <=
Facteur d'escompte : $v=\dfrac{1}{(1+i)}$
Valeur actualisée ou valeur actuelle = escompté ou capitalisé au temps t

1.3 Actualisation d'une rente certaine p.5

1.4 Paiements de fréquence et montant constant p.7

$a\neg=(v+v^2+v^3+\cdots+v^n)$ ou $a\neg=\dfrac{1-v^n}{i}$ valeur au temps 0

$s\neg=\dfrac{(1+i)^n-1}{i}$ valeur au temps n

$\ddot{a}\neg=(1+i)a\neg$ payement au début de la période
$\ddot{s}\neg=(1+i)s\neg$ payement au début de la période

1.5 Amortissement d'un prêt p.11

P=paiement
C= montant en prêt
N=nombre de paiement

$$P=\frac{C}{a\neg}$$

Méthode rétrospective = méthode prospective : $C(1+i)^t-P\cdot s\neg=Pa\neg$

1.6 Taux de rendement d'un investissement p.16

$Total=P_1v^{t_1}+P_2v^{t_2}+\cdots+P_nv^{t_n}$

1.7 Le prix d'une obligation (! semestres, mois, années) p.18

C = valeur nominal de l'obligation
k = montant du coupon
k/C = taux du coupon (taux facial)
i = taux de rendement i (r en compta)
A = valeur des paiements futurs taux i
n = nombre de coupon restant

$$A=ka\neg+Cv^n$$
$$A=C+(k-iC)a\neg$$
$$i=\left(\frac{k}{C}\right)+\frac{(C-A)}{C\cdot a\neg}$$

1.8 Le prix versus le cours entre deux dates de coupons p.23

f = fraction de l'année écoulé
fk = intérêt courue
cours = prix – fk
entre deux dates de coupon :

$$A=(1+i)^{\frac{x}{12}}\left(ka\neg+Cv^n\right)$$
$$A=(1+i)^{-\frac{x}{12}}\left(k+ka\neg+Cv^{n-1}\right)$$

1.9 Taux nominaux p.26

taux nominal / fréquence de capitalisation = taux effectif, $i^m=j=m\left[(1+i)^{\frac{1}{m}}-1\right]$

taux instantané : $\delta=\ln(1+i)$, $(1+i)^t=e^{\delta t}$

1.10 Intérêt simple p.29

2 Fonctions d'une variable indépendante

2.1 Notion de variable

2.2 Notion de fonction

2.3 Polynômes et fonctions apparentées

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

$a^0 = 1$

$a^n \cdot a^{-m} = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$a^{n-1} = \frac{a^n}{a}$

$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

2.4 Fonctions exponentielles et logarithmiques

$a^{\log(a^b)} = b$

$\log_a(1) = 0$

$\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$

$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c)$

$\log_a(b^c) = c \cdot \log_a(b)$

$e^{\ln(x)} = x$

$e^0 = 1$

$a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$

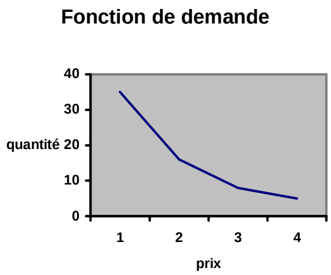
2.5 Applications économiques

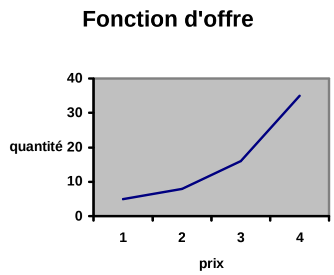
$C(q)$ = coût total

$C(0)$ = coût fixe

$c(q) = \frac{C(q)}{q}$ = coût moyen

!! Prendre l'équation sous la bonne forme q=f(p)





Taxes :

	Acheteur (nouv. demande)	Producteur (nouv. offre)
taxe proportionnelle à p	$q = f((1+\tau)\cdot p)$	$q = g((1-\tau)\cdot p)$
taxe par unité	$q = f(p+\tau)$	$q = g(p-\tau)$

3 Dérivation

3.1 Suites, limites, continuité

3.2 Dérivée, définition

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

3.3 Technique de dérivation

Formulaires et tables : p77

$f = \ln(x) \rightarrow f' = \frac{1}{x}$

$f = e^{ax} \rightarrow f' = ae^{ax}$

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

!! dérivée interne

3.4 Dérivées d'ordre supérieur

3.5 Développement de Taylor (! carré, cube,..)

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{1}{k!} f^k(x_0)(x - x_0)^k$$

3.6 Différentielles

$$f(x_0 + dx) \approx f(x_0) + f'(x_0)dx + \frac{1}{2} f''(x_0)dx^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_0)dx^3$$

$f'(x_0) > 0$: fonction croissante

$f'(x_0) < 0$: fonction décroissante

3.7 Extrema

$f'(x) = 0$: condition d'ordre 1

$f''(x) > 0$: minimum

$f''(x) < 0$: maximum

$f''(x) = 0$: regarder plus loin

3.8 Applications économiques

$C'(q)$ = coût marginal

min coût moyen = coût marginal : min $c(q) = \frac{C(q)}{q} = C'(q)$

Max bénéfice : $B(q) = R(q) - C(q) = p \cdot q - C(q)$

$B'(q) = 0$ ou $R'(q) = p = C'(q)$

maximum si : $B''(q) < 0$ ou $C''(q) > 0$

4 Elasticité

4.1 Définition

élasticité de y par rapport à x : $E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y' = x \cdot (\ln(y))'$

$$E_x(y) = \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{y}{x}} = \frac{\text{pente de la tangente}}{\text{pente du rayon, origine à (x, y)}}$$

4.2 Propriétés

$E > 0 : y' > 0$: élasticité direct

$E < 0 : y' < 0$: élasticité opposé

$E = 0 : y' = 0$: inertie

$E > |1|$: réaction forte

$E = 1$: égalité

$E < |1|$: réaction faible

$E_y(x) = \frac{1}{E_x(y)}$

$E_x(ay) = E_x(y)$

$E_x(xy) = 1 + E_x(y)$

$E_x\left(\frac{y}{x}\right) = E_x(y) - 1$

4.3 Applications économiques

évolution de la demande : volume d'échange $V = p \cdot q = p \cdot f(p) \rightarrow V' = q \cdot (1 + E_p(q)) = 0$ max
=> $E_p(q) = -1$

évolution des coût de production : $c' = \left(\frac{C(q)}{q}\right)' = \frac{C(q)}{q^2} \cdot (E_q(c) - 1) = 0$ min

5 Intégration

5.1 Définitions

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

5.2 Technique d'intégration

formulaires et tables : p80

$x \ln(x) - x + c \leftarrow \ln(x)$

par partie : $\int_a^b f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)dx$

fonctions rationnelles : $\frac{P(x)}{Q(x)}$, $P(x) \leq n-1$, $Q(x) = n$ sinon en premier diviser

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{C_1}{x - r_1} + \frac{C_2}{x - r_2} + \ldots + \frac{C_n}{x - r_n}, \quad \int \frac{P(x)}{Q(x)} = C_1 \cdot \ln(x - r_1) + C_2 \cdot \ln(x - r_2) + \ldots + C_n \cdot \ln(x - r_n) + c$$

trouver C, r sont les zéros de Q(x)
méthode 1 : on multiplie par les zéros de $Q(x) \Rightarrow P(x) = C_1 \cdot (\cdots) + C_2 \cdot (\cdots)$
méthode 2 : on multiple par 1 des zéros et on fixe x = à la valeur de ce zéro

substitution : $\int_a^b g\Big(\underbrace{f(x)}_{u}\Big) \cdot \underbrace{f'(x)dx}_{du} = \int_{f(a)}^{f(b)} g(u)du$

5.3 Equations différentielles

homogène du premier ordre : $ay' + by = 0 \quad y = e^{rx} \quad y(x) = Ce^{rx}$

homogène du deuxième ordre : $ay'' + by' + cy = 0 \quad y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

non homogène du premier ordre : $F'(t) = \delta \cdot F(t) + r(t) \quad F(t) = \frac{\int (e^{-\delta t} \cdot r(t))dt + c}{e^{-\delta t}}$

5.4 Applications économiques

coût totaux = coût fixes + coût variable (marginaux)

$$C(q) = C(0) + \int_0^q C'(x)dx$$

rente du consommateur :

$$\int_0^{q_m} (p(q))dq - p_m \cdot q_m$$

rentre du producteur :

$$p_e \cdot q_e - \int_0^{q_e} (p(q))dq$$

!! p(q) pas q(p)

6 Calcul matriciel (vecteurs) p.49

6.1 Définitions ; déterminants

$\vec{a} \cdot \vec{a} = \sum a_i^2 = \|\vec{a}\|^2$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$

$relation = \begin{cases} y_1 = ax_1 + bx_1 \\ y_n = ax_n + bx_n \end{cases}$

6.2 Opérations sur les matrices

$A_{m\times p} \cdot B_{p\times n} = C_{m\times n} \quad c_{ij} = \sum(ligne(i) \cdot colonne(j))$

matrice identité : $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

matrice diagonale : $D = \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$

matrice symétrique : $A = A^T$ => vecteurs propres de différents valeurs propres sont orthogonaux $\perp$

6.3 Algèbre des matrices

$(AB)^T = B^T A^T$

$(A^T)^T = A$

6.4 Rang d'une matrice

$\det(A) = 0$ si le rang(A) < n

opérations élémentaires

remplacer la ligne i par k fois la ligne i = multiple le det par k

remplacer la ligne i par ligne i + k fois la ligne j = rien sur le det

échanger la ligne i avec la ligne j = det change de signe

$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix} \quad cof = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

matrice triangulaire : $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = \prod a_{ii} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$

Méthode de Sarrus : ajouter deux premières colonnes, puis somme +- des diagonales

$\det(A) = \det(A^T)$

$\det(kA) = k^n \cdot \det(A)$

!! $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

$\det(AB) = \det(A) - \det(B)$

$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

6.5 Inversion de matrice

matrice A régulier, B l'inverse de A : $AB = BA = I$

La matrice inverse est unique, inversible si : $\det(A) \neq 0$

$A^{-1}A = AA^{-1} = I$

$(A^{-1})^{-1} = A$

$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

!! $(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

n=2 : $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

n : $adj(A) = cof(A)^T$

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$

6.6 Applications économiques

$\begin{bmatrix} \text{Matière} \\ \text{première} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Matrice} \\ \text{technologique} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Quantité} \\ \text{produite} \end{bmatrix}$

$N_{t+n} = M^n N_t$

7 Développements mathématiques

7.1 Formes linéaires

$A_{m\times n} \cdot \vec{x}_{n\times 1} = \vec{b}_{m\times 1}$

7.2 Transformations linéaires

$Y = AX$ $\quad X = A^{-1}Y$ $\quad$ r=rang(A)

r=m : une solution existe toujours
r<m : une solution existe seulement pour certain y
r=n : si une solution existe elle est unique
r<n : si une solution existe elle n'est pas unique

7.3 Résolution de systèmes d'équations linéaires

$$\begin{bmatrix} 1 & c & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \uparrow x = d \begin{bmatrix} cb \\ a \\ 1 \end{bmatrix}$$

7.4 Formes quadratiques

cas spécial : $x_1 x_2$ = indéfini

$$f(x_1,\ldots,x_n) = a_{11}(\ldots)^2 + \frac{\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}}{a_{11}}(\ldots)^2 + \frac{\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}}(\ldots)^2 + \cdots$$

définie positive si tous les coefficients sont > 0
définie négative si tous les coefficients sont < 0
indéfinie sir les coefficients sont > et < 0
semi-définie positive si tous les coefficients sont ≥ 0 et au moins un = 0
semi-définie positive si tous les coefficients sont ≤ 0 et au moins un = 0
!! hors des diagonal les valeurs sont divisé par 2 pour former la matrice A

7.5 Vecteurs propres

λ est une valeur propre de A si $\det(A - \lambda I) = 0$

$AX = \lambda X$

A : matrice $\quad$ X : vecteur propre associé à la valeur λ

8 Applications économiques

8.1 Modèle de Leontiev

X = production
Y = importation
Z = exportation
A = transformation
B = balance commercial
$S^T = [1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1 \quad 1]$
tableaux de relation : ligne= de,
colonne = vers (x_1,x_2)
viabilité : $a_{11} + a_{21} + d_1 < 1$

$X = (I - A)^{-1} Z$

$Z = (I - A)X$

$Y = DX$

$d_{ij} = \frac{y_{ij}}{x_{ij}}$

$B = S^T \left(I - D(I - A)^{-1}\right) Z$

$B = \sum \text{exportation} - \sum \text{importation}$

9 Fonctions de plusieurs variables indépendantes

9.1 Objet de l'étude

$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

9.2 Dérivées partielles

$$f'_{x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

$$f'_{x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

$$grad(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

9.3 Différentielle totale premier ordre

$$dy \approx f'_{x_1}(x_1, x_2)dx_1 + f'_{x_2}(x_1, x_2)dx_2$$

9.4 Dérivées partielles d'ordre supérieur

$$f''_{x_1x_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \qquad f''_{x_1x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = f''_{x_2x_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \qquad f''_{x_2x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$$

9.5 Différentielle totale seconde ordre

$$d^2 y \approx f''_{x_1x_1}(x_1, x_2)(dx_1)^2 + 2 f''_{x_1x_2}(x_1, x_2)dx_1 dx_2 + f''_{x_2x_2}(x_1, x_2)(dx_2)^2$$

9.6 Développement de Taylor

$y = f(x_1, x_2, x_3)$

point de référence : $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$

$$\Delta X = \begin{bmatrix} x_1 - \dot{x}_1 \\ x_2 - \dot{x}_2 \\ x_3 - \dot{x}_3 \end{bmatrix}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) \approx f(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) + \mathrm{grad}f \cdot \Delta X + \frac{1}{2}(\Delta X)^T H(\Delta X) + \mathrm{reste}$$

9.7 Extrema libres (sans contraintes)

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \qquad \mathrm{grad}f(x_1, x_2) = \vec{0}$$

influence de la différentiel d'ordre deux
si la forme quadratique est définie positive : le point est un minimum
si la forme quadratique est définie négative : le point est un maximum
si la forme quadratique est indéfinie : le point est un point de selle
si la forme quadratique est définie semi positive : il n'y a pas de maximum, min possible
si la forme quadratique est définie semi négative : il n'y a pas de minimum, max possible
régression linéaire

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$$

$$a = \frac{\sum x_i y - n\overline{xy}}{\sum x_i^2 - n\overline{x}^2}$$

$$b = \overline{y} - a\overline{x}$$

9.8 Extrema liés (sous contrainte)

9.9 Applications économiques

Ecrire toutes les étapes, ne pas oublier $-\lambda$