

SÉRIE 11

EXERCICE 1

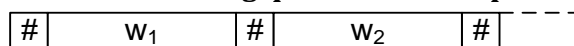
1. Machine de Turing qui simule un automate :

On construit une machine de Turing qui contient l'input de l'automate à simuler sur sa bande. Les états et transitions de l'automate sont repris comme états et transitions pour la machine de Turing. On lit simplement la bande de gauche à droite. Si une transition n'est pas possible on rejete, si on arrive à la fin du mot sur la bande et que l'état est acceptant on accepte, sinon on rejete.

Machine de Turing qui simule un automate à pile :

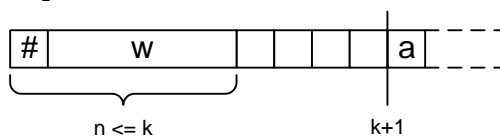
Même procédé que ci-dessus pour un automate normal, simplement on utilise une deuxième bande pour simuler la pile.

2. Machine de Turing qui efface un couple de deux mots :



Aller jusqu' au 3^{ème} #, l'effacer et effacer tous les symboles de droite à gauche en comptant les #. Après le deuxième, l'effacer et s'arrêter. On a effacé deux mots.

Impossibilité d'une Machine « Gomme de Turing » :



Si il existe une GT, étant donné l'input w il existe k tel que $C_1, \dots, C_n \leq k$, le calcul qui efface la bande à partir de w .

Hors on ne peut pas effacer avec un nombre fini de configuration une bande qui est infinie. Il peut toujours exister un symbole, après les k calculs. Ou k est infinie, mais alors la machine ne s'arrêtera jamais.

3. Machine de Turing qui décide $\{a^p b^p c^p : p \geq 1\}$:

Avec une machine à deux bandes contenant l'input sur la première bande.

On initialise la 2^{ème} bande en écrivant un symbol #, puis on lit la bande 1 de gauche à droite.

Tant que l'on lit un a sur la bande 1 on écrit un 0 sur la bande 2.

Pour chaque b que l'on veut lire sur la bande 1 (de gauche à droite), on doit pouvoir lire un 0 sur la bande 2 (de droite à gauche).

Quand on n'a fini de lire les b , on doit lire le symbol # sur le bande 2, sinon on rejete le mot.

Il ne reste plus qu'à lire les c sur la bande 1, tout en lisant un 0 sur la bande 2 (de gauche à droite).

Quand on n'a fini de lire les c (lecture de symbol vide sur la bande 1), on doit également lire le symbole vide sur le bande 2, dans ce cas on peut accepter le mot. Sinon on doit le rejeter.

4. Machine de Turing qui décide l'ordre des entiers en base 10 ($n_1 < n_2$):

Avec des entiers naturels :

Avec une machine de Turing à 2 bandes. Copier n_1 sur la bande 2.

Lire n_1 et n_2 depuis la fin, afin de comparer les unités, dizaines, ...

Après chaque évaluation on passe soit dans l'état $n_1 \geq n_2$ ou $n_1 < n_2$. D'après la liste de transitions établit $1 < 2$ état 2, $2 < 2$ état 1, ... pour tous les cas possibles.

Lorsqu'on arrive au début sur une des deux bande (lecture du symbol #). Il y a trois cas possible :

Symbole de début de n_2 sur la bande 1, mais pas sur la bande 2 : rejeter car $n_2 > n_1$

Début sur la bande 2, mais pas sur la bande 1 : accepter car $n_1 < n_2$

Début sur les deux bandes : il faut accepter si on est dans l'état 2 et rejeter si on est dans l'état 1

Avec des entiers relatifs :

En plus des cas si dessous il faut traiter le signe -, donc rajouter des transitions pour traiter :

Si un des inputs est négatif, on peut toute de suite accepter si $-n_1 < n_2$ ou rejeter si $n_1 < -n_2$

Si les deux inputs sont négatifs, il faut tester l'ordre comme avant, mais inverser les conditions d'acceptation car $-9 < -3$.

5. Machine de Turing qui calcul l'addition en base 10 :

Avec des entiers naturels :

Avec une machine de Turing à 4 bandes. Copier n_1 sur la bande 2.

Lire n_1 et n_2 depuis la fin. Afin d'éviter de devoir décaler la bande si le nombre de symbole de $n_1 <$ celui de n_2 . Ecrire le résultat de l'addition des deux chiffres sur une 3^{ème} bande (on pourra retrouver la réponse en lisant la 3^{ème} bande à l'envers). Il faut créer toutes les transitions $0, 1 \Rightarrow 1$, ..., $2, 3 \Rightarrow 5$ et également considérer les cas qui sont supérieur ou égale à 10. Dans ces cas stocker une retenu sur la 4^{ème} bande.

A chaque étape il faut avant de comparer les chiffres de la bande 1 et 2 vérifier que la bande 4 est vide. Si ce n'est pas le cas effectuer l'addition de 1 + le chiffre de la bande 2 et effacer la retenu, sauf si le chiffre de n_2 était 9.

Dans les transitions il doit également y avoir les cas fin d'un des deux mots = recopie de la valeur de l'autre mot.

Une fois que n_2 et n_1 sur la bande 1 et 2 ont été lues on peut recopier le mot de la bande 3 (de droite à gauche) sur la bande 4 (de gauche à droite) pour avoir le résultat dans le bon sens.

Machine de Turing qui calcul la soustraction en base 10 :

Pour la soustraction il faut procéder de la même manière que pour l'addition, mais il faut adapter toutes les fonctions de transitions. Dans le cas ou le mot auquel on veut soustraire est plus petit que le deuxième. On peut s'arrêter sur une erreur de signe négatif non traitable dans le domaine de nombre entier naturels.